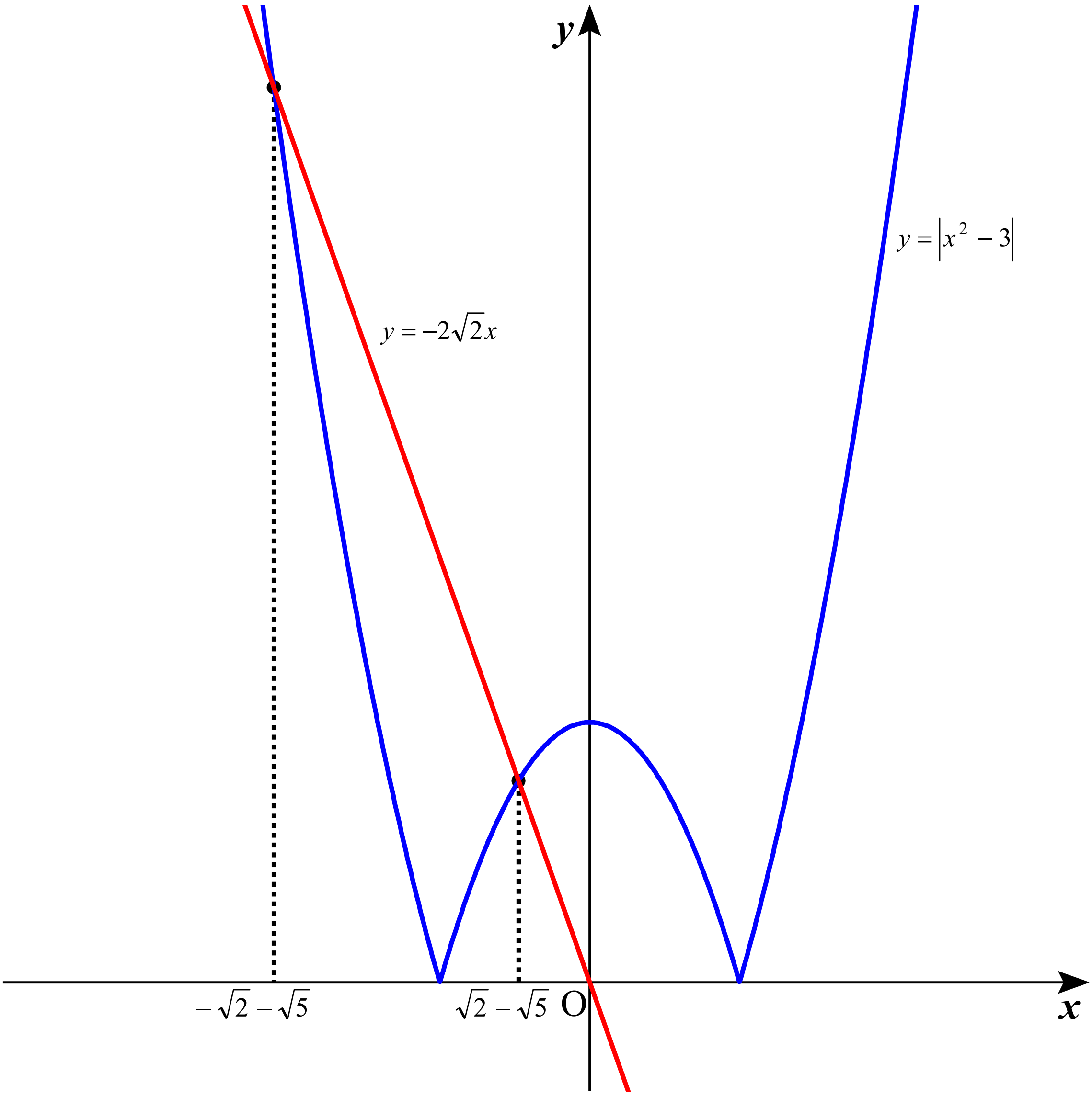
2 次関数

1．2 次方程式／方程式を解く

（ア）

$\left|x^2-3\right|+2\sqrt{2}x=0 \Leftrightarrow \left|x^2-3\right|=-2\sqrt{2}x \Leftrightarrow y=\left|x^2-3\right|$ と $y=-2\sqrt{2}x$ の交点の x 座標

解説図



（ウ）

相反方程式とその解き方

相反方程式

整式の方程式を降べきの順あるいは昇べきの順に整理したとき，
係数が左右対称となる方程式
逆数方程式ともいう。

相反方程式の分類

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a \neq 0)$　・・・①（偶数次の相反方程式）

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a \neq 0)$　・・・②（奇数次の相反方程式）

解き方は，方程式が偶数次（①）と奇数次（②）で異なる。

相反方程式の解き方

注意

$x=0$ が相反方程式の解でないことを示してから，
偶数次あるいは奇数次の相反方程式を解く作業に入ること。

1．偶数次の相反方程式（①）の解き方

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

↓　両辺を $x^2\ (x \neq 0)$ で割る。

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

↓　係数について整理する。

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$$a\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

↓　$x+\dfrac{1}{x}=y$ とおき，y についての 2 次方程式にする。

$a(y^2-2)+by+c=0$

$ay^2+by-2a+c=0$

↓

解 y と $y=x+\dfrac{1}{x}$ から解 x を求める。

2． 奇数次の相反方程式（②）の解き方

解き方のポイント：因数分解し，偶数次の相反方程式をつくる。

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ に $x=-1$ を代入すると，

$-a+b-c+c-b+a=0$ となるから，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は $x=-1$ を解にもつ。

すなわち，$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ は $x+1$ で割り切れる。

よって，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}$

ゆえに，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は，

$(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}=0$

と変形できる。

よって，

$x=-1$ 以外の解は，

偶数次の相反方程式：$ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a=0$

を解いて求めればよい。

重要

$x+\dfrac{1}{x}$ には，$x>0$ の条件が付けられていることがよくあるので注意しなければならない。

たとえば，

$y=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとき，$ay^2+by-2a+c$ $(a>0)$ の最小値を求めよ。

といった問題では，

相加平均≧相乗平均より，$y=x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ だから，

$y\geq 2$ の範囲で最小値を求めなければならない。

ともかく，

正の数が出てきたら，条件反射的に「相加平均≧相乗平均」を意識しよう。

2．2 次不等式／不等式を解く

（イ）

$\frac{x+6}{x} > x+2 \Leftrightarrow x^2 \times \frac{x+6}{x} > x^2(x+2)$ より，$x^2+6x > x^3+2x^2$　$\therefore x(x-2)(x+3) < 0$

ゆえに，$x < -3$ または $0 < x < 2$

3．ルートがらみの方程式・不等式を解く

3　演習題

（ア）

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x}} = -x+1 \Leftrightarrow x^2+\sqrt{x} = (-x+1)^2 \cap x \geq 0 \cap -x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = -2x+1 \cap 0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x = (-2x+1)^2 \cap 0 \leq x \leq 1 \cap -2x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-5x+1 = 0 \cap 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (4x-1)(x-1) = 0 \cap 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$\therefore x = \frac{1}{4}$　・・・(答)

（イ）

$$\sqrt{3x^2-12} \leq x+4 \Leftrightarrow 3x^2-12 \leq (x+4)^2 \cap 3x^2-12 \geq 0 \cap x+4 \geq 0$$

$\therefore 2-3\sqrt{2} \leq x \leq -2$ または $2 \leq x \leq 2+3\sqrt{2}$　・・・(答)

（ウ）

$$\sqrt{4x-x^2} > 3-x \Leftrightarrow \left(4x-x^2 \geq 0 \cap 3-x < 0\right) \cup \left(4x-x^2 > (3-x)^2 \cap 4x-x^2 \geq 0 \cap 3-x \geq 0\right)$$

$4x-x^2 \geq 0 \cap 3-x < 0$ より，$3 < x \leq 4$　・・・①

$4x-x^2 > (3-x)^2 \cap 4x-x^2 \geq 0 \cap 3-x \geq 0$ より，$\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x \leq 3$　・・・②

①または②より，$\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x \leq 4$　・・・(答)

（エ）

$$\sqrt{\frac{3-x}{2x}} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{3-x}{2x} < \frac{1}{x^2} \cap \frac{3-x}{2x} \geq 0 \cap \frac{1}{x} \geq 0$$

$\frac{3-x}{2x} < \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{3-x}{2x} < x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$ より，$x < 1 \cup 2 < x$　・・・①

$\dfrac{3-x}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2x(3-x) \geq 0$ より，$0 \leq x \leq 3$　・・・②

$\dfrac{1}{x} \geq 0$ より，$x > 0$　・・・③

①かつ②かつ③より，$0 < x < 1$ または $2 < x \leq 3$　・・・(答)

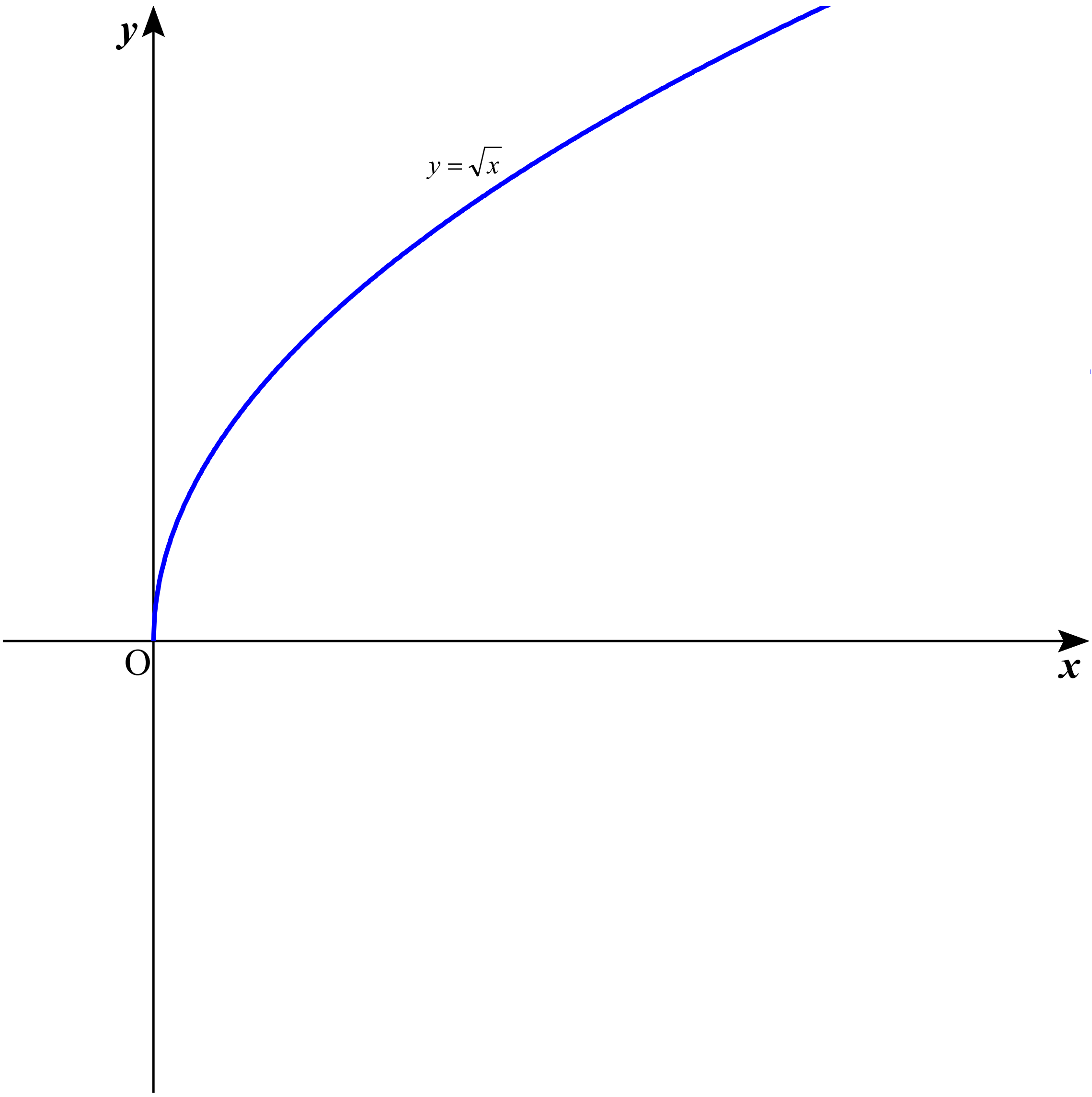
無理方程式・無理不等式を同値変形するコツ

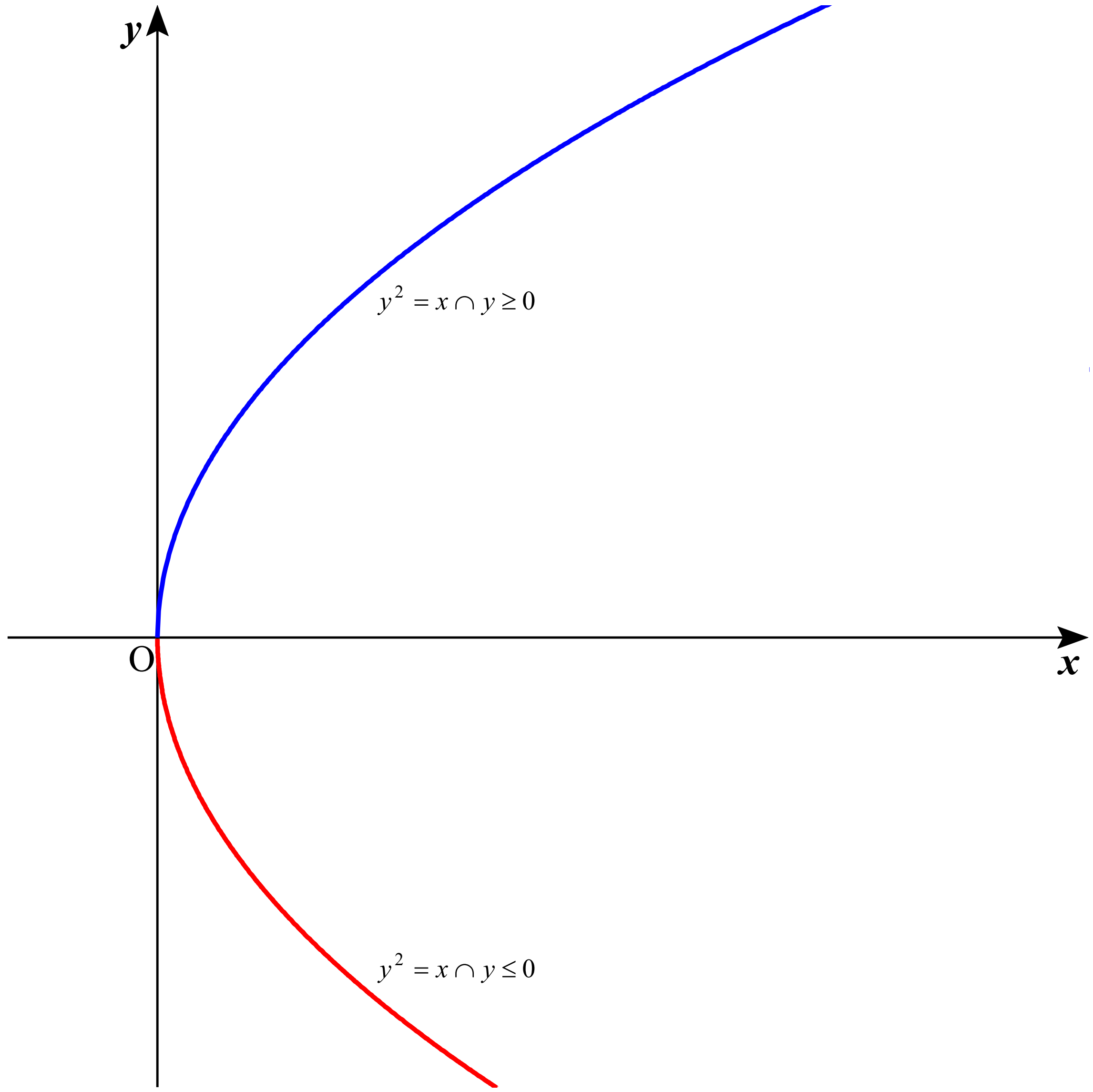
1. $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \cap y \geq 0$

y を $f(x)$，x を $g(x)$ に置き換えると，

$f(x) = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \{f(x)\}^2 = g(x) \cap f(x) \geq 0$

解説図





y
x
O
$y^2 = x \cap y \geq 0$
$y^2 = x \cap y \leq 0$

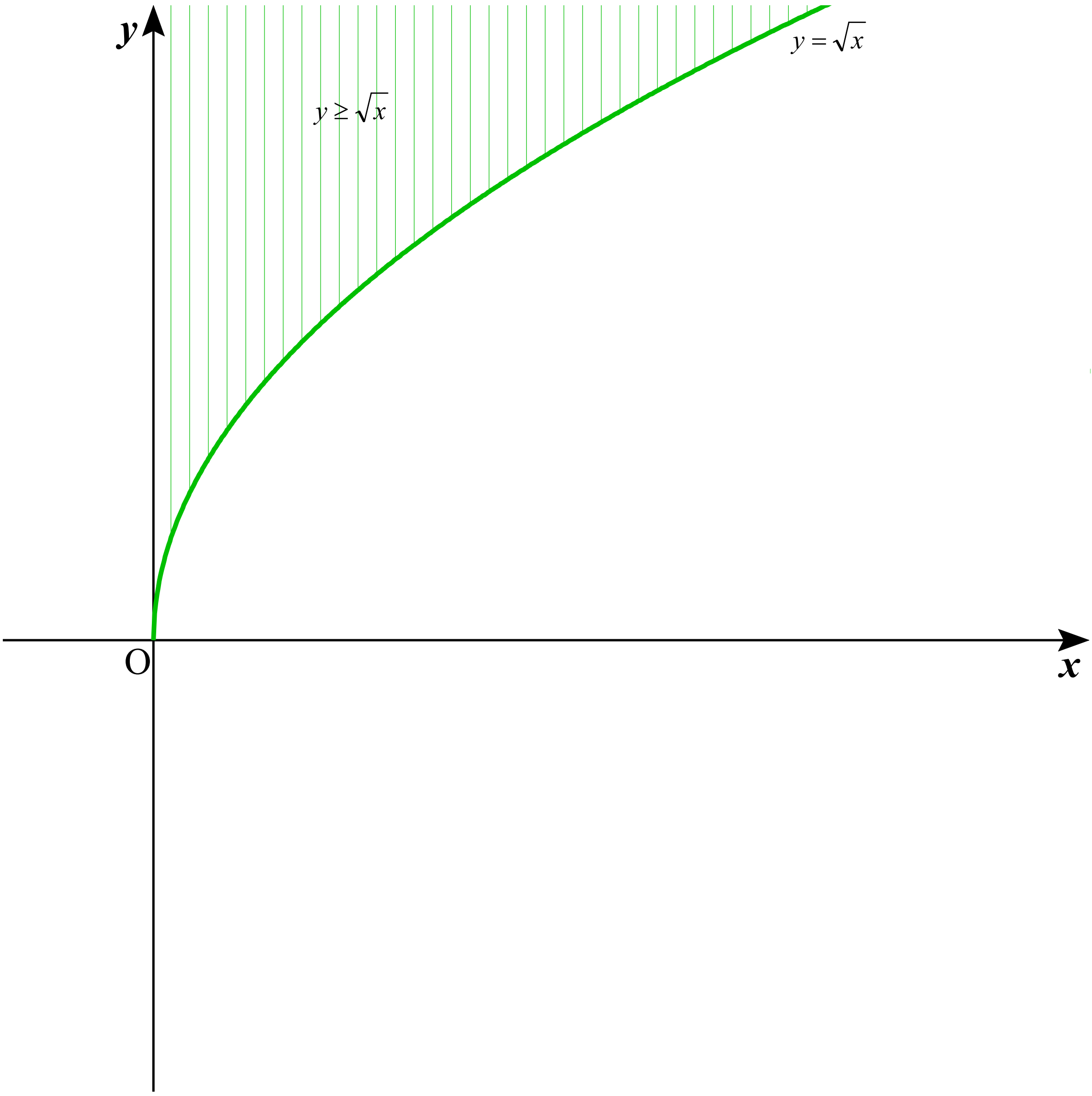
2.　$y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow y \geq 0 \cap x \geq 0 \cap y^2 \geq x$

y を $f(x)$，x を $g(x)$ に置き換えると，

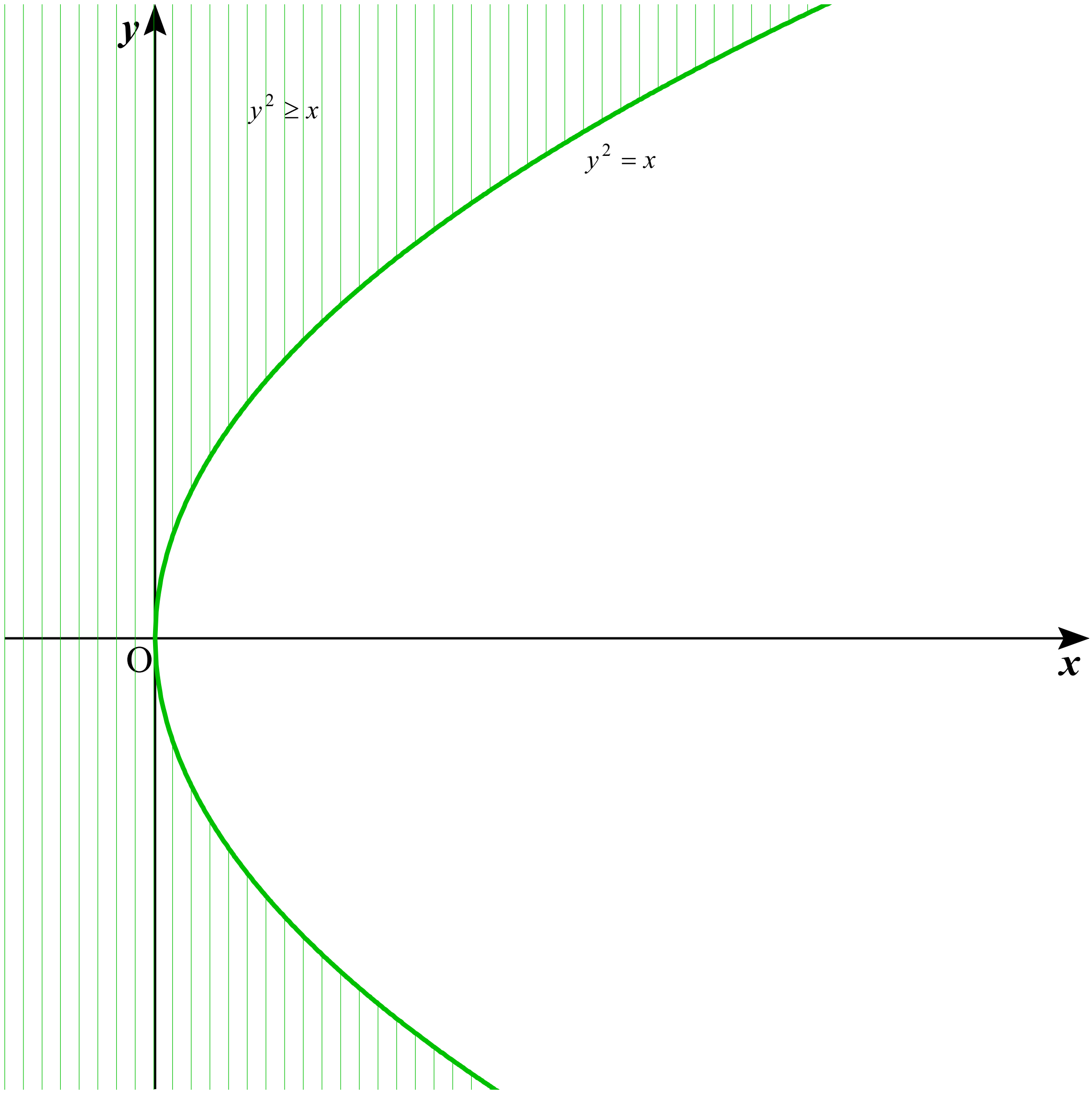
$f(x) \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0 \cap \{f(x)\}^2 \geq g(x)$

解説図

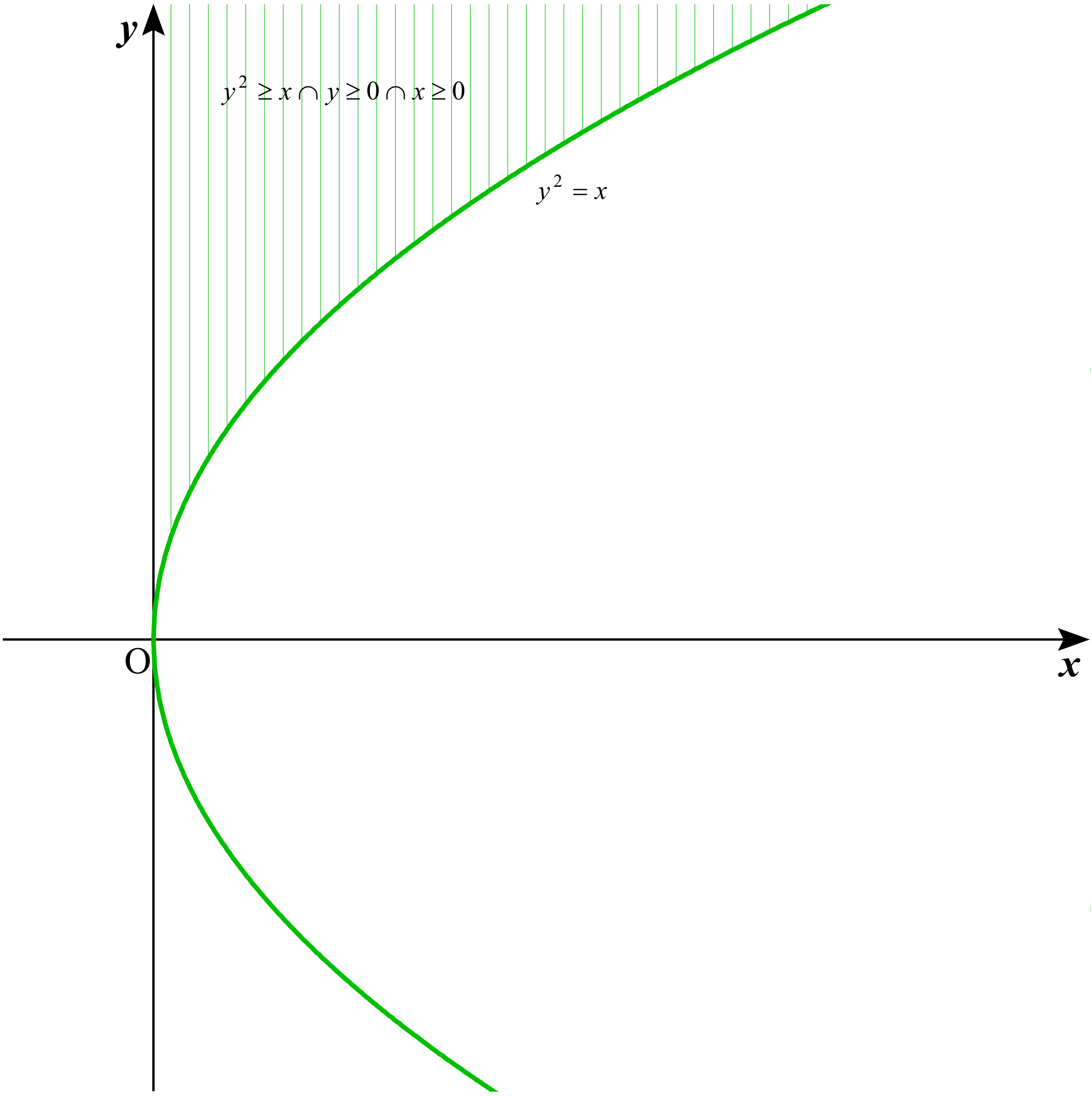
領域 $y \geq \sqrt{x}$



領域 $y^2 \geq x$



よって，領域 $y \geq \sqrt{x}$ と領域 $y \geq 0 \cap x \geq 0 \cap y^2 \geq x$ は同値である。

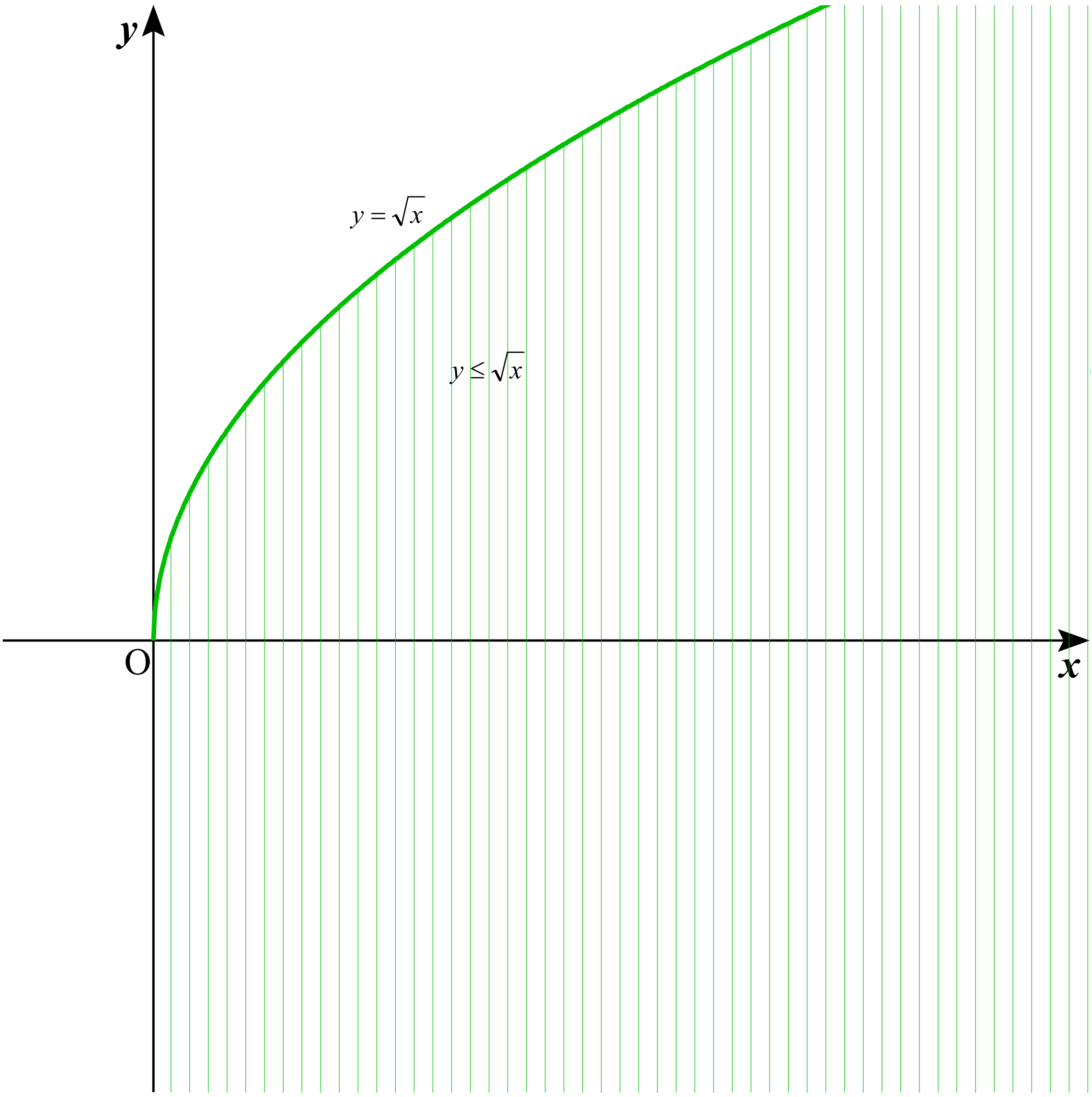


3. $y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow (y \leq 0 \cap x \geq 0) \cup (y \geq 0 \cap x \geq 0 \cap y^2 \leq x)$
y を $f(x)$，x を $g(x)$ に置き換えることにより，

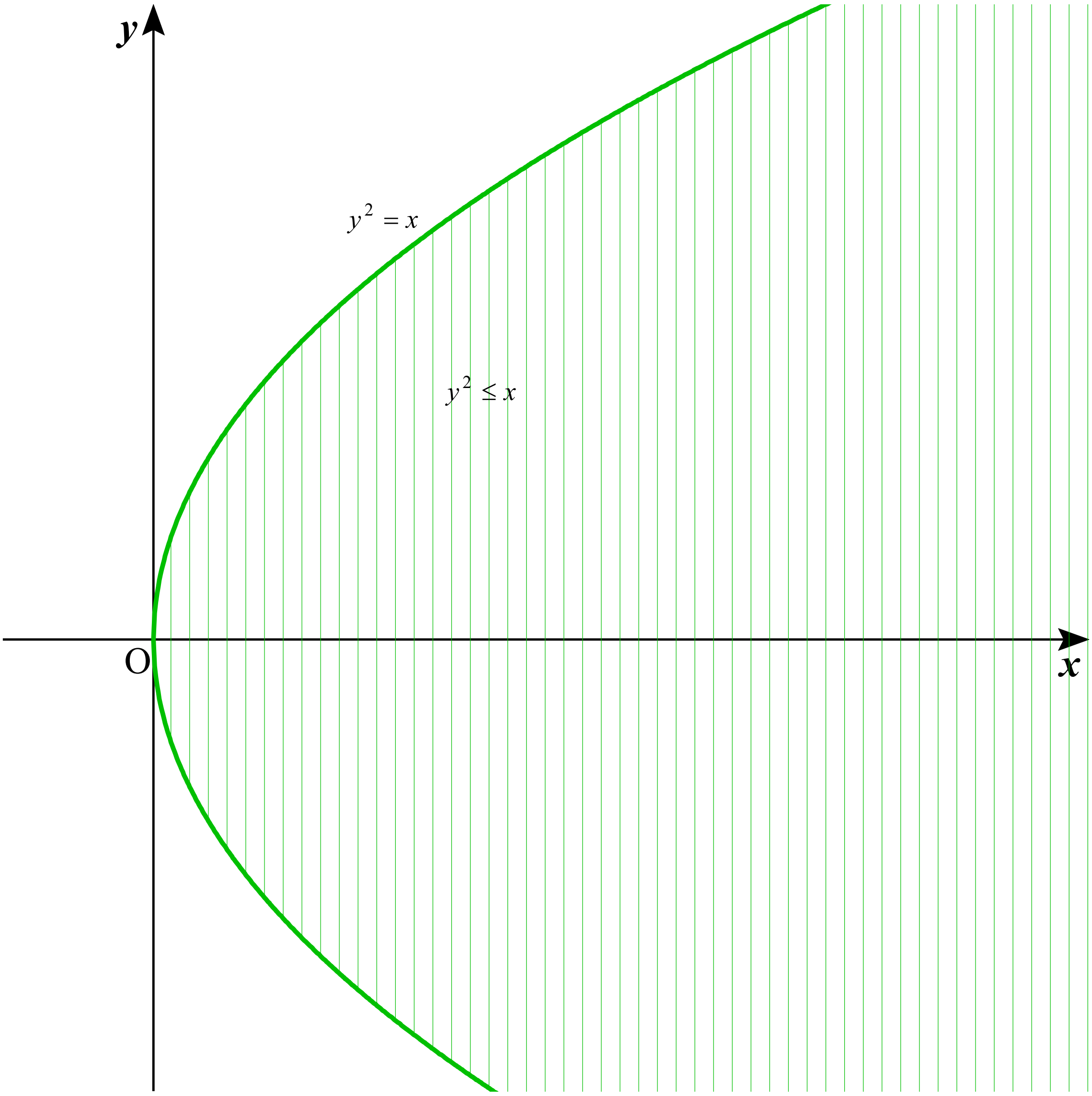
$f(x) \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow (f(x) \leq 0 \cap g(x) \geq 0) \cup (f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0 \cap \{f(x)\}^2 \leq g(x))$

解説図

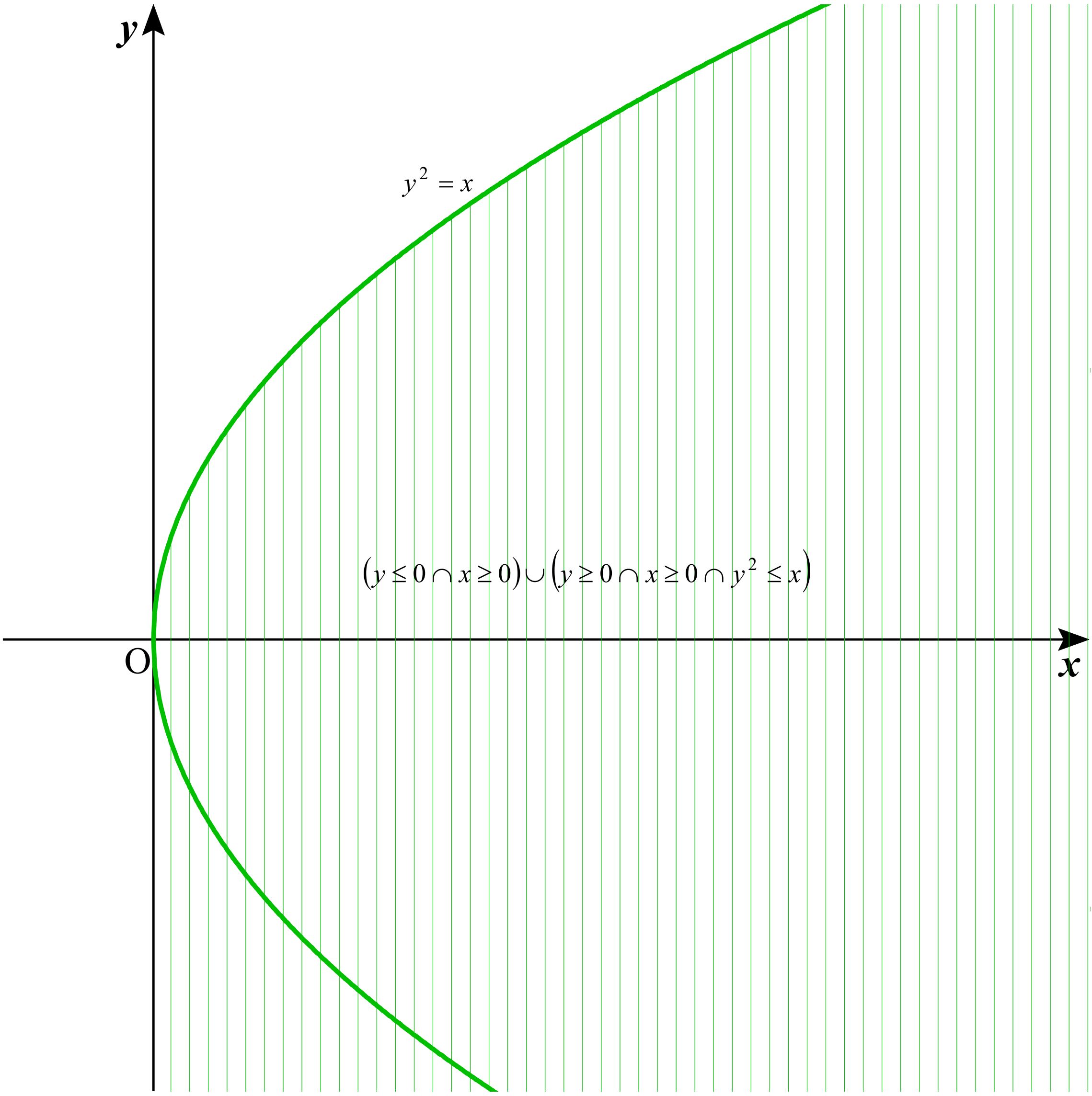
領域 $y \leq \sqrt{x}$



領域 $y^2 \leq x$



よって，領域 $y \leq \sqrt{x}$ と領域 $(y \leq 0 \cap x \geq 0) \cup (y \geq 0 \cap x \geq 0 \cap y^2 \leq x)$ は同値である。



5．2 次方程式／解と係数の関係

5　演習題

(1)

$\alpha^2+\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha^3+\alpha^2+2\alpha=0$，$\alpha^4+\alpha^3+2\alpha^2=0$ より，

$\alpha^4=-\alpha^3-2\alpha^2=\alpha^2+2\alpha-2\alpha^2=-\alpha^2+2\alpha=\alpha+2+2\alpha=3\alpha+2$

同様に，$\beta^4=3\beta+2$

よって，$\alpha^4+\beta^4=3(\alpha+\beta)+4=-3+4=1$　・・・(答)

また，

$\alpha^5=\alpha\cdot\alpha^4=\alpha(3\alpha+2)=3\alpha^2+2\alpha=3(-\alpha-2)+2\alpha=-\alpha-6$

同様に，$\beta^5=-\beta-6$

よって，$\alpha^5+\beta^5=-(\alpha+\beta)-12=1-12=-11$　・・・(答)

10　2 次関数のグラフ／係数との関係，移動

10 演習題

(ア)

(B)　解説補足

2 次関数のグラフは，その軸に関して対称であるから，

$x=1$ と $x=p$ が軸 $x=\alpha$ に関して対称であるとすると，

この 2 次関数のグラフは $x=p$ と x 軸で交わる。

これと $\dfrac{1+p}{2}=\alpha$，$\alpha<0$ より，$p=2\alpha-1<-1$ であることより，

$x=-1$ は $x=1$ と $x=p$ の間に位置することから，

$x=-1$ とこの 2 次関数のグラフの交点の y 座標の値，すなわち $a-b+c$ は負である。

12．2 変数関数／等式の条件が 2 次式の場合

(ア)

別解 1

$x^2+y^2=1$ 上の点 $(x,\ y)$ は媒介変数 θ $(0\le\theta<2\pi)$ を用いて $(x,\ y)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せる。

すると，

$$
\begin{aligned}
x^2+4y&=\cos^2\theta+4\sin\theta\\
&=1-\sin^2\theta+4\sin\theta\\
&=-(\sin\theta-2)^2+5
\end{aligned}
$$

これと $-1\le\sin\theta\le1$ より，x^2+4y は $\sin\theta=1$ のときすなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 4 を，

$\sin\theta=-1$ のときすなわち $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -4 をとる。

よって，x^2+4y は $(x,\ y)=(0,\ 1)$ のとき最大値 4 をとり，$(x,\ y)=(0,\ -1)$ のとき最小値 -4 をとる。

別解 2

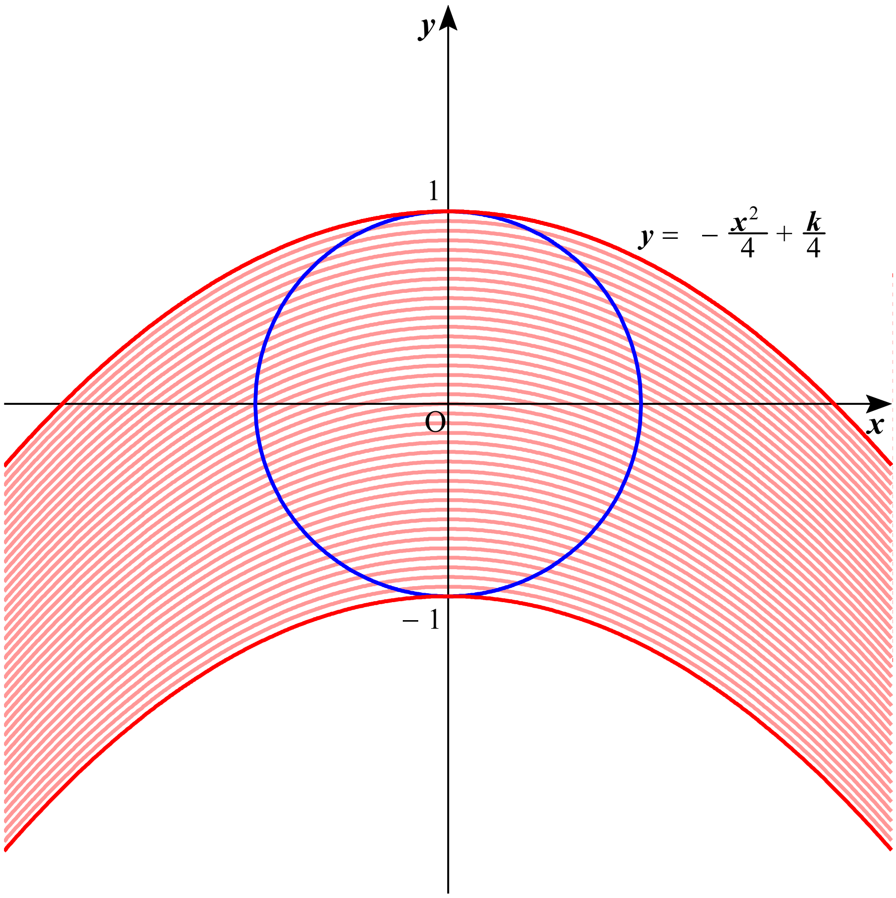
$x^2+4y=k$ とすると，$y=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{k}{4}$ だから，

$x^2+y^2=1$ と $y=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{k}{4}$ が共有点をもつときの k の最大値と最小値を求めればよい。

よって，

最大値は $\dfrac{k}{4}=1$ すなわち $k=4$ で，このときの共有点は $(x,\ y)=(0,\ 1)$

最大値は $\dfrac{k}{4}=-1$ すなわち $k=-4$ で，このときの共有点は $(x,\ y)=(0,\ -1)$



12　演習題

（イ）

(1)

$x^2-xy+y^2-y-1=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{(3y+2)(y-2)}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2=-\dfrac{(3y+2)(y-2)}{4}$

ここで $\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2\geq 0$ より，$-\dfrac{(3y+2)(y-2)}{4}\geq 0$　　$\therefore -\dfrac{2}{3}\leq y\leq 2$

14. 2 変数関数／1 文字固定法

解法 1

$x \geq 0$， $0 \leq y \leq 2-x$ より，

$0 \leq x \leq 2$

また，

$$2xy + ax + 4y \leq 2x(2-x) + ax + 4(2-x)$$
$$= -2x^2 + ax + 8$$
$$= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 8$$

ここで， $f(x) = -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 8$ とおくと，

$f(x)$ は $\frac{a}{4} \leq x$ のとき単調減少する。

これと $a < 0$ より，

$0 \leq x \leq 2$ において $f(x)$ は単調減少する。

よって， $x = 0$ のとき $f(x)$ は最大値 $f(0) = 8$ をとる。

また，このとき $y = 2 - 0 = 2$

ゆえに， $2xy + ax + 4y$ は， $x = 0,\ y = 2$ のとき最大値 8 をとる。

解法 2：1 文字固定と微分

ポイント

$z = f(x,\ y)$ の z の増減を微分を使って調べる場合，

まず $x,\ y$ の 2 変数のうち適当な 1 つを定数扱いし，

もう 1 つの変数で z を微分し，その増減関係を調べることから始める。

解

$z = 2xy + ax + 4y$ の x を定数とみなし， z を y で微分すると， $\frac{dz}{dy} = 2x + 4 > 0$ $(\because x \geq 0)$

よって， z は x が一定のとき変数 y に対し単調増加する。

ここで $x = t$ $(0 \leq t \leq 2)$ とすると，

$y = 2 - t$ のとき z は最大値 $2t(2-t) + at + 4(2-t)$，すなわち $-2t^2 + at + 8$ をとる。

$f(t) = -2t^2 + at + 8$ $(0 \leq t \leq 2)$ とすると， $f'(t) = -4t + a$ $(0 \leq t \leq 2)$

これと $a < 0$ より $f'(t) < 0$

よって， $f(t) = -2t^2 + at + 8$ $(0 \leq t \leq 2)$ は単調に減少する。

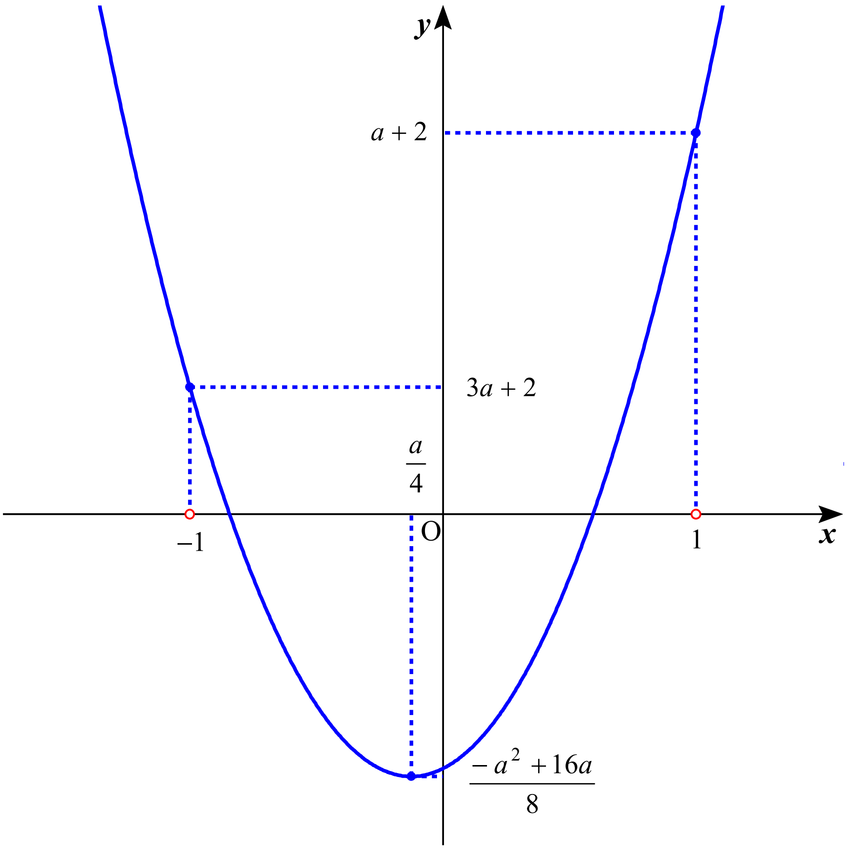
ゆえに， $t = 0$ のとき $f(t)$ は最大値 $f(0) = 8$ をとる。

以上より， $x = 0,\ y = 2$ のとき z は最大値 8 をとる。

16．2 次方程式の解の配置／文字定数分離

文字定数分離しないで解いてみる

(1)　略解



$y=2x^2-ax+2a$ とおくと，

$$y=2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{-a^2+16a}{8}$$

したがって，$y=2x^2-ax+2a$ のグラフが上図のようになるためには，

$f(1)=a+2>0$ かつ $f(-1)=3a+2>0$ かつ $-1<\frac{a}{4}<1$ かつ $\frac{-a^2+16a}{8}<0$ であればよく，

これを解くと，$-\frac{2}{3}<a<0$　・・・(答)

(2)　略解

2 つの相異なる解または重解が $-1<x<1$ にあるとき

(1)と同様にして，

$f(1)=a+2>0$ かつ $f(-1)=3a+2>0$ かつ $-1<\dfrac{a}{4}<1$ かつ $\dfrac{-a^2+16a}{8}\leq 0$ であればよく，

これを解くと，$-\dfrac{2}{3}<a\leq 0$　・・・①

解が $x=1$ または $x=-1$ のとき

$f(1)=a+2=0$ または $f(-1)=3a+2=0$ より，

$a=-2$ または $a=-\dfrac{2}{3}$　・・・②

2 つの相異なる解の 1 つが $-1<x<1$ にあるとき

$f(-1)\cdot f(1)=(3a+2)(a+2)<0$ より，$-2<a<-\dfrac{2}{3}$　・・・③

①または②または③より，$-2\leq a\leq 0$　・・・(答)

16　演習題

文字定数分離しないで解く

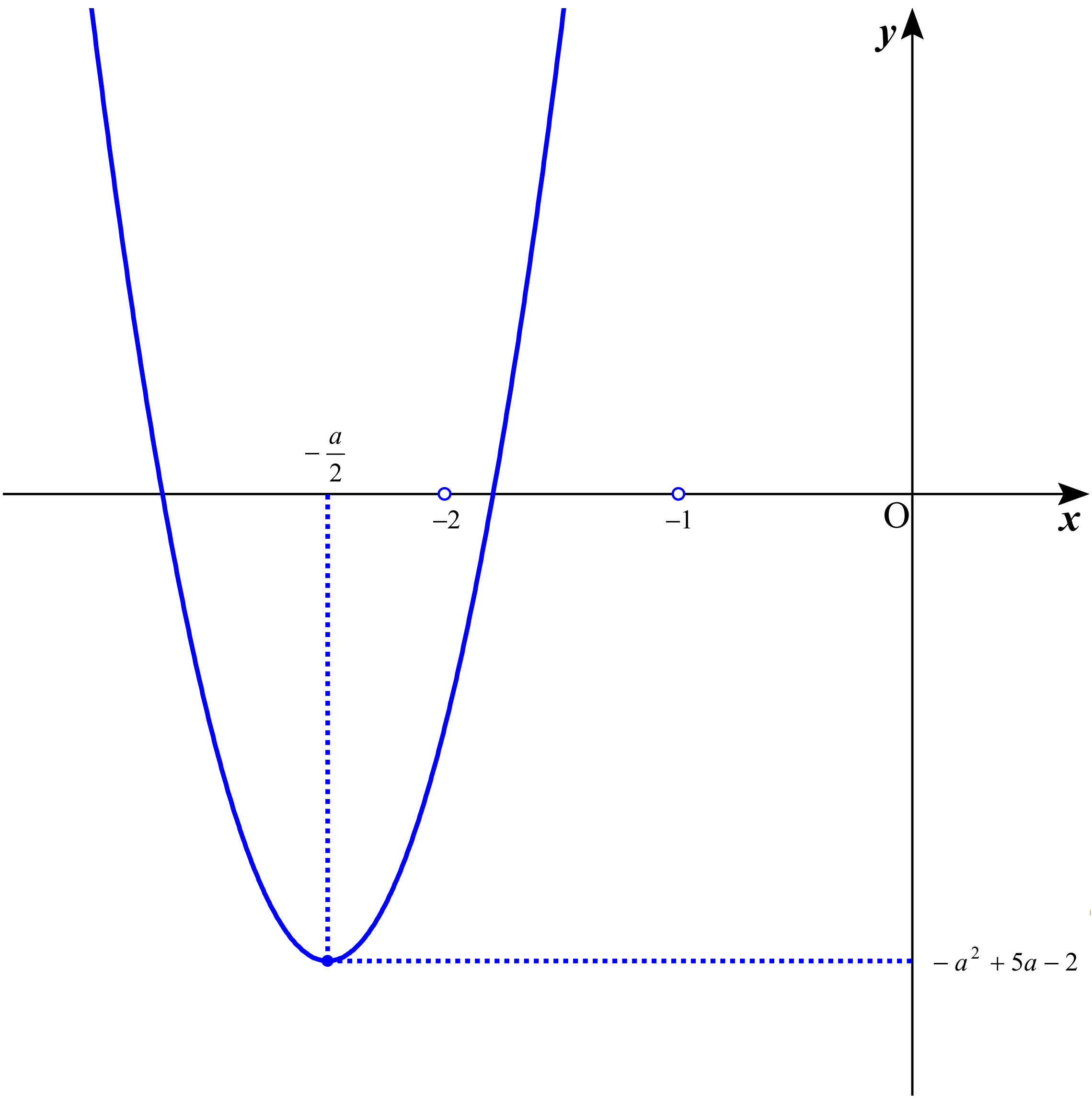
(1)

$y=f(x)=4x^2+4ax+5a-2$ とすると，

$f(-2)=-3a+14<0$ かつ $f(-1)=a+2>0$ であればよい。

$\therefore a>\dfrac{14}{3}$　・・・(答)

尚，$-a^2+5a-2<0$ は，$f(-2)=-3a+14<0$ かつ $f(-1)=a+2>0$ で保証される。



(2)

$4x^2+4ax+5a-2=0$ の小さい方の解は，解の公式より，$-\dfrac{a+\sqrt{\left(a-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}}{2}$ だから，

$a>\dfrac{14}{3}$ において，$-\dfrac{a+\sqrt{\left(a-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}}{2}$ は単調減少する。

よって，$-\dfrac{a+\sqrt{\left(a-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}}{2}<-\dfrac{\frac{14}{3}+\sqrt{\left(\frac{14}{3}-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}}{2}$

$-\dfrac{\frac{14}{3}+\sqrt{\left(\frac{14}{3}-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}}{2}=-\dfrac{8}{3}$ より，小さい方の解は $-\dfrac{8}{3}$ より小さい値を取る。

20．2 次不等式／「すべて」と「ある」がらみ

(2)

$-2\leq x\leq 3$ の範囲で

「ある x に対して，$f(x)\geq g(x)$」の否定は「すべての x に対して，$f(x)<g(x)$」だから，

すべての x に対して，$f(x)<g(x)$ となる a の値の範囲以外が求める a の値の範囲である。

つまり，すべての x に対して，$f(x)<g(x)$ となる a の値の範囲を求め，

これを否定すればよい。

$-2\leq x\leq 3$ における $f(x)-g(x)=2(x-1)^2-(a+2)$ の最大値は $f(-2)-g(-2)=16-a$ だから，

すべての x に対して，$f(x)<g(x)$ となる a の値の範囲は $16-a<0$ すなわち $a>16$

よって，ある x に対して，$f(x)\geq g(x)$ となる a の値の範囲は $a\leq 16$

(4)

「ある x_1, x_2 の組に対して，$f(x_1)\geq g(x_2)$」の否定は

「すべての x_1, x_2 の組に対して，$f(x_1)<g(x_2)$」だから，

すべての x_1, x_2 の組に対して，$f(x_1)<g(x_2)$ となる a の値の範囲以外が求める a の値の範囲である。

つまり，すべての x_1, x_2 の組に対して，$f(x_1)<g(x_2)$ となる a の値の範囲を求め，

これを否定すればよい。

$f(x)$ の最大値は $f(3)=9+a$，$g(x)$ の最小値は $g(-2)=-12+2a$ だから，

すべての x_1, x_2 の組に対して，$f(x_1)<g(x_2)$ となる a の値の範囲は

$9+a<-12+2a$ すなわち $a>21$

よって，ある x_1, x_2 の組に対して，$f(x_1)\geq g(x_2)$ となる a の値の範囲は $a\leq 21$